Asignación 4

Termodinámica y Física Estadística

Resuelva los siguientes problemas de teoría combinatoria y probabilidades.

1. Se lanzan 10 monedas al aire, ¿de cuántas maneras pueden caer, (a) si se puede distinguir cada moneda y el orden importa? (b) si se consideran las que caigan caras de un solo tipo y los sellos de otro y el orden importa? (c) si se consideran las que caigan caras de un solo tipo y los sellos de otro sin importar el orden?. (d) De ésta última ¿cuál es la combinación que tiene mayor probabilidad de ocurrir?

2. ¿Cuántos números mayores que 3000 y menores que 4000 pueden formarse con los dígitos 2, 3, 5 y 7 (a) si cada cifra puede usarse sólo una vez? o (b) si cada cifra puede emplearse las veces que se desee?

3. Demuestre que las combinaciones con repetición vienen dadas por la fórmula

$$C_r(m,n) = C(m+n-1,n) = \binom{m+n-1}{n}.$$

4. Se dispone de un recipiente con 4 tipos de arandelas, A, B, C y D, y se van a sacar muestras de 3 arandelas cada una. ¿Cuántas muestras distintas se pueden elegir? Resp. 20.

5. De un total de N artículos de los cuales B son buenos y los restantes, $D = N - B$ son defectuosos se escoge al azar una muestra de n artículos. ¿Cuál es la probabilidad de que en la muestra haya x artículos buenos (y $n - x$ defectuosos)?

6. Se tienen los números 325 y 1478. ¿Cuántos números distintos, de 4 cifras, se pueden formar, con dos cifras no repetidas del primero y dos no repetidas del segundo? Resp. 432.

7. Un borracho parte de un farol en el centro de una calle, dando pasos de igual longitud a la derecha o a la izquierda con igual probabilidad. ¿Cuál es la probabilidad de que esté nuevamente en el farol después de dar N pasos, (a) si N es par, (b) Si N es impar?

8. Consideremos el problema anterior, con probabilidad p de dar un paso hacia la derecha y probabilidad q hacia la izquierda, donde $p = q$. Sea $m = n_1 - n_2$ el desplazamiento neto, con n_1 pasos a la derecha y n_2 pasos a la izquierda. Después de $N = n_1 + n_2$ pasos, calcular los valores medios $\langle m\rangle$, $\langle m^2\rangle$, $\langle m^3\rangle$ y $\langle m^4\rangle$. Resp. $\langle m\rangle = 0$, $\langle m^2\rangle = N$, $\langle m^3\rangle = 0$ y $\langle m^4\rangle = 3N^2 - 2N$.

9. La probabilidad de una secuencia de N sucesos donde n_1 de ellos se producen con probabilidad p y n_2 con probabilidad q, donde $N = n_1 + n_2$, viene dada por

$$P(n_1) = P(n_2) = \underbrace{pp\cdots p}_{n_1\text{veces}}\,\underbrace{qq\cdots q}_{n_2\text{veces}} = p^{n_1}q^{n_2}.$$

Si los sucesos pueden ocurrir en un orden cualquiera, hay muchos modos diferentes posibles de realizar los N sucesos totales, donde $N = n_1 + n_2$. Por lo tanto se debe que considerar las permutaciones con repetición en la probabilidad

$$P(n_1) = \frac{N!}{n_1!n_2!}p^{n_1}q^{n_2} = \frac{N!}{n_1!(N-n_1)!}p^{n_1}q^{N-n_1}.$$

Si ambas probabilidades p y q son complementarias ($p+q=1$). (a) Utilice el teorema del binomio para demostrar que se cumple la condición de normalización, es decir, $\sum_{n_1=0}^{N} P(n_1) = 1$ para todos los valores posibles de n_1. (b) Demuestre que el número medio de n_1 es $\langle n_1\rangle = Np$.